

Белорусский национальный технический университет, Минск

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ВЕСОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕКТОРОВ НАПРАВЛЕНИЙ

Бокуть Л.В., Кулешов А.Я.

The correlation analysis of weight values of direction vectors and their order numbers of normalized vector model for objects under investigation is proposed. The experimental results of construction of the regression line are represented, as well as ones for calculation of theoretical-correlation ratio, similarity measure and classification of objects under investigation for a land plot of a space snap-shot are obtained.

Технология тематической обработки полутоновых изображений включает процедуры формирования полутоновых изображений, сегментации по однородным областям, описания объектов, идентификации и автоматической классификации [1, 2]. Распознавание (дешифрирование) объектов полутоновых изображений (ПТИ) по их контурному представлению актуально для решения различных прикладных задач цифровой обработки данных дистанционного зондирования Земли [3].

Для повышения точности идентификации и автоматической классификации объектов полутоновых изображений предлагается применить корреляционный анализ векторов направлений. В данной работе построение меры близости (сходства) исследуемых объектов осуществляется на основе теоретического корреляционного отношения, производится определение значений параметров линии регрессии весовых значений векторов направлений и их порядковых номеров, приводятся примеры вычисления меры сходства десяти синтезированных объектов, идентификации объектов космического снимка участка местности и их классификации. В качестве инвариантных информационных признаков используются весовые значения векторов направлений нормализованной векторной модели исследуемых объектов.

1. Классификация исследуемых объектов ПТИ.

Классификация включает в себя все процессы, заканчивающиеся указанием некоторого класса (или принадлежности классу) для рассматриваемого объекта или данных. Результат распознавания тоже можно представить как подобное указание класса - в таком смысле распознавание образов является одной из разновидностей классификации. В тех случаях, когда каждый класс содержит только один объект, классификация эквивалентна идентификации [4]. Специфика конкретных задач распознавания связана с числом m распознаваемых образов, а также с характером сведений о частотах w и вероятностях $P(u)$ получения измерения от j -го образа. В практической деятельности обычно точно неизвестна та или иная функция распределения и можно лишь априорно указать параметрический класс, к которому принадлежит распределение. Поэтому обучающая выборка при распознавании образов получила очень широкое применение. Наибольшее влияние на способ распознавания оказывают вид распределения $P(u)$ и точность исходных данных о них [5, 6]. При этом рассматриваются три ситуации: полностью описанные классы; использование обучающих выборок; отсутствие априорных сведений о $P(u)$.

Классификация в случае, когда распределения $P(u)$ классов определены полностью, базируется на лемме Неймана-Пирсона, байесовских решениях, минимаксных решениях, методах максимального правдоподобия [5, 6]. В общем случае отыскание минимаксного решения - довольно трудная задача. Однако облегчает положение результат Вальде, устанавливающий соответствие между минимаксным и байесовским решениями. Наряду с критерием отношения правдоподобия на практике широко используются правила классификации, крити-

ческие области которых находятся путем минимизации функции потерь при данных ограничениях на границе критической области.

Во втором случае распределения $P(u)$ неизвестны, но о них в той или иной степени можно судить по обучающим выборкам, каждая из которых является совокупностью измерений, выполненных для известного объекта. Теоретические результаты классификации при наличии обучающих выборок базируются на основе дискриминантного анализа (ДА) [5, 6]. Методы ДА основаны на параметрических, полупараметрических и непараметрических оценках правдоподобия. Предварительный анализ данных - один из наиболее ответственных этапов дискриминантного анализа. Теоретическим основанием для линейной дискриминантной функции (ЛДФ) служит модель Фишера, применяется же ЛДФ в значительно более широких условиях [5]. Еще не решена задача, полностью исключая субъективный фактор ДА. Оценка качества конкретного правила классификации проводится лишь на новой выборке, либо обучающей выборке.

В третьем случае отсутствует и обучающая выборка. Тогда невозможно проводить распознавание и можно попытаться определить лишь "схожесть" отдельных объектов между собой. Процедуры подобного вида обычно называют кластерным анализом [5, 6]. В общей (нестрогой) постановке проблема классификации объектов заключается в том, чтобы всю анализируемую совокупность объектов $O = \{O_i\}$, $(1, m)$, статистически представленную в виде метрик χ и ρ , характеризующих либо расстояние между объектами, либо степень близости тех же объектов, разбить на сравнительно небольшое число (заранее известных или нет) однородных в определенном смысле групп или классов [5 – 7]. Наиболее трудным и наименее формализованным в задачах автоматической классификации является момент, связанный с определением понятия однородности объектов. В общем случае понятие однородности объекта определяется заданием правила вычисления величины r , характеризующей либо расстояние $d(O_i, O_j)$ между объектами O_i и O_j из исследуемой совокупности $O(i, j = 1, 2, \dots, n)$, либо степень близости (сходства) $r(O_i, O_j)$ тех же объектов [5].

2. Понятие теоретического корреляционного отношения.

Мера близости – один из важнейших инструментов анализа данных при их классификации, выборе средних, поиске закономерностей, связанных с оценкой сходства [7].

Одним из показателей меры близости и сходства исследуемых объектов является коэффициент корреляции. Широкое применение коэффициента корреляции в качестве меры сходства исследуемых объектов объясняется, прежде всего, тем, что он является достаточно устойчивой характеристикой при распознавании изображений, как при большом, так и при малом объеме выборки [5, 8]. Необходимо отметить, что только лишь при большом числе независимых наблюдений, подчиненных одному и тому же распределению близкому к нормальному, коэффициент корреляции близок к истинному. Во всех других случаях, характеризующихся ограниченным количеством экспериментальных данных и нелинейностью их зависимости, коэффициент корреляции может не отражать истинную меру сходства исследуемых объектов и поэтому в качестве такой характеристики рекомендуется использовать теоретическое корреляционное отношение, интерпретация которого не зависит от вида исследуемой зависимости [9 – 11]:

$$\eta_T = \sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}}, \quad (1)$$

где σ^2 - общая дисперсия, δ^2 - межгрупповая дисперсия, причем

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k y_i^2 n_i}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^k y_i n_i}{n} \right)^2; \quad (2)$$

y_i – весовые значения векторов направлений нормализованной векторной модели исследуемого объекта;

n_i – количество векторов направлений i -го весового значения в нормализованной векторной модели;

n – общее число векторов направлений. Межгрупповая дисперсия вычисляется по формуле:

$$\delta_i^2 = \sigma^2 - \sigma_{y(x)}^2; \quad (3)$$

где $\sigma_{y(x)}^2$ – средняя из частных дисперсий [10],

$$\sigma_{y(x)}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (y_i - \bar{y}_{x_i})^2 n_i}{n}; \quad (4)$$

\bar{y}_{x_i} – значения ординат линии регрессии.

Проведем экспериментальные исследования теоретического корреляционного отношения для классификации объектов полутонных изображений по их контурному представлению. В качестве инвариантных информационных признаков воспользуемся весовыми значениями векторов направлений. Сформировать инвариантные информационные признаки позволяет нормализация векторной модели исследуемых объектов по масштабу и ориентации.

Процесс нахождения линии регрессии y_x заключается в обоснованном выборе аппроксимирующей кривой и расчете параметров ее уравнения. Чаще всего для этой цели используются кривые, уравнения которых выражаются многочленами целых положительных степеней [10]:

$$\bar{y}_x = a + bx; \quad (5)$$

$$\bar{y}_x = a + bx + cx^2; \quad (6)$$

$$\bar{y}_x = a + bx + cx^2 + dx^3. \quad (7)$$

Определим параметры a , b , c и d , пользуясь методом наименьших квадратов:

$$f = \sum (y - \bar{y}_x)^2 = (y - a - bx - cx^2 - dx^3)^2 \rightarrow \min \quad (8)$$

Условие обращения f в \min записывают в виде

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial c} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial d} = 0 \quad (9)$$

при

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} > 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial d^2} > 0.$$

Из выражений (8) и (9) получим систему нормальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} na + b \sum x + c \sum x^2 + d \sum x^3 &= \sum y, \\ a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 + d \sum x^4 &= \sum yx, \\ a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 + d \sum x^5 &= \sum yx^2, \\ a \sum x^3 + b \sum x^4 + c \sum x^5 + d \sum x^6 &= \sum yx^3, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Расчеты линии регрессии для векторной модели синтезированного объекта №1 (рис. 1), содержащей 13 векторов направлений ($n=13$), произведем при помощи табл. 1. Значения координат x, y определяются порядковыми номерами x векторов направлений в векторной модели и весовыми значениями y векторов направлений синтезированного объекта №1.

Таблица 1

Определение числовых значений параметров системы

x	y	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	yx	yx^2	yx^3	\bar{y}_x
1	2	1	1	1	1	1	2	2	2	1.38186813
2	2	4	8	16	32	64	4	8	16	1.87912088
3	1	9	27	81	243	729	3	9	27	2.39210789
4	2	16	64	256	1024	4096	8	32	128	2.91908092
5	4	25	125	625	3125	15625	20	100	500	3.45829171
6	5	36	216	1296	7776	46656	30	180	1080	4.00799201
7	6	49	343	2401	16807	117649	42	294	2058	4.56643357
8	5	64	512	4096	32768	262144	40	320	2560	5.13186813
9	5	81	729	6561	59049	531441	45	405	3645	5.70254745
10	5	100	1000	10000	100000	1000000	50	500	5000	6.27672328
11	7	121	1331	14641	161051	1771561	77	847	9317	6.85264735
12	8	144	1728	20736	248832	2985984	96	1152	13824	7.42857143
13	8	169	2197	28561	371293	4826809	104	1352	17576	8.00274725
$\Sigma=91$	60	819	8281	89271	1002001	11562759	521	5201	55733	60

Подставляя числовые значения в систему нормальных уравнений (10), получим

$$\left. \begin{aligned} 13a + 91b + 819c + 8281d &= 60, \\ 91a + 819b + 8281c + 89271d &= 521, \\ 819a + 8281b + 89271c + 1002001d &= 5201, \\ 8281a + 89271b + 1002001c + 11562759d &= 55733. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Решив систему (11), определим значения коэффициентов a, b, c и d , получим уравнение линии регрессии

$$\bar{y}_x = 0.90209790 + 0.47044622x + 0.00961538x^2 - 0.00029138x^3 \quad (12)$$

3. Вычисление меры сходства синтезированных объектов.

Нормализованные векторные модели для десяти синтезированных объектов приведены в табл.2. Рассмотрим примеры определения теоретического корреляционного отношения наиболее близких синтезированных объектов № 4 и 7 относительно синтезированного объекта № 1, принимаемого за эталон (рис. 1).

Таблица 2

Определение теоретического корреляционного отношения синтезированных объектов

Номер объекта	Нормализованная векторная модель десяти синтезированных объектов	Теоретическое корреляционное отношение
1	2,2,1,2,4,5,6,5,5,5,7,8,8	0.92826879
2	1,2,1,1,1,2,3,4,4,4,6,6,5,6,6,8,8	0.96241508
3	1,3,3,1,1,2,4,5,6,5,5,5,7,8,8	0.90976365
4	2,1,2,2,4,5,6,5,5,5,7,8,8	0.93761493
5	2,2,1,1,3,4,5,6,5,5,5,7,8,8	0.93173142
6	2,2,1,2,1,4,5,6,5,5,5,5,7,8,8	0.91110948
7	2,2,1,2,4,5,5,6,5,5,7,8,8	0.93786049
8	2,1,3,4,4,6,6,5,7,7,1,2,8	0.57960723
9	1,1,3,4,3,3,1,4,5,6,6,8,8,7	0.89659741
10	2,2,1,2,4,5,6,5,5,4,7,7,8,8	0.91394603

Воспользуемся векторными моделями синтезированных объектов № 1, № 4, № 7 (табл. 2). Подставляя числовые данные из табл.1 в формулы (1) – (3), определим теоретическое корреляционное отношение синтезированных объектов №1, № 4, № 7:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= 5.00591716; \quad \bar{\delta}_1^2 = 4.3135134; \quad \eta_1 = 0.92826879; \\ \sigma_2^2 &= 5.00591716; \quad \bar{\delta}_2^2 = 4.40081073; \quad \eta_2 = 0.93761493; \\ \sigma_3^2 &= 5.00591716; \quad \bar{\delta}_3^2 = 4.40311611; \quad \eta_3 = 0.93786049.\end{aligned}$$

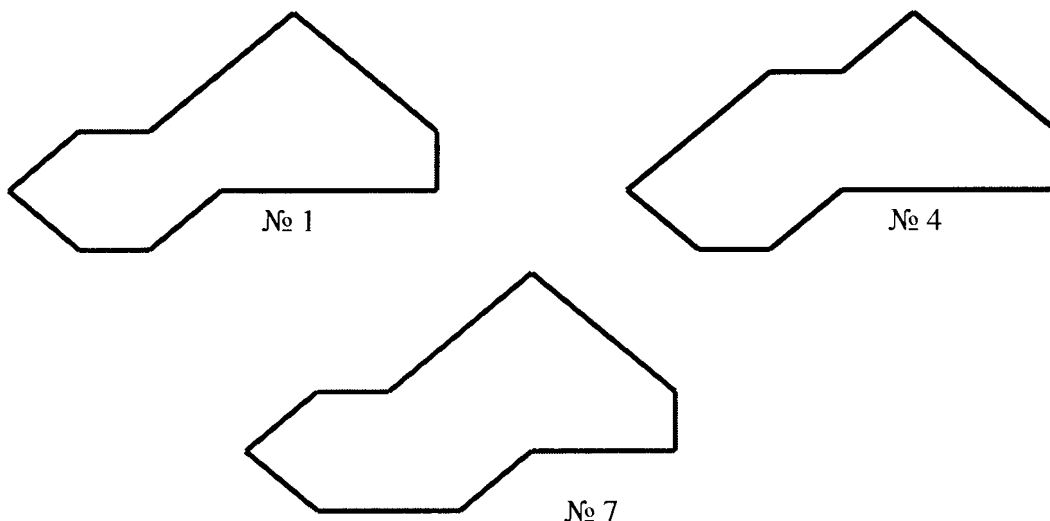


Рис.1. Контурное представление синтезированных объектов № 1, 4, 7.

Из табл.2 следует, что наиболее схожими объектами, имеющими наибольшее значение теоретического корреляционного отношения, являются объекты № 2, 7, 4, 5, 1, 10, 6, 3. Объекты № 9, 8 имеют меньшие значения теоретического корреляционного отношения.

Меру сходства исследуемого объекта I относительно объекта S, принимаемого за эталон, определим следующим образом:

$$M_{s,i} = (1 - Abs(\eta_s - \eta_i)). \quad (13)$$

Тогда мера сходства объекта № 4 относительно объекта № 7, принимаемого за эталон, на основании числовых данных табл. 2, равна:

$$M_{7,4} = (1 - Abs(0.93786049 - 0.93761493)) = 0.99975444.$$

Как известно, при задании меры близости $r(O_i, O_j)$ необходимо соблюдать следующие математические требования [7]:

- симметрии $r(O_i, O_j) = r(O_j, O_i)$;
- максимального сходства объекта с самим собой $r(O_i, O_j) = \max r(O_i, O_j)$;
- монотонного убывания $r(O_i, O_j)$.

Предложенная мера сходства (13) отвечает требованиям симметрии:

$$M_{7,4} = M_{4,7} = 0.99975444.$$

Она также отвечает математическим требованиям максимального сходства объекта с самим собой и монотонного убывания, что следует из определения теоретического корреляционного отношения [5, 7, 9].

Разработанный программный комплекс позволяет определить линию регрессии, вычислить теоретическое корреляционное отношение и меру сходства исследуемого объекта относительно эталона, за который может приниматься любой исследуемый объект.

Отличительной особенностью предлагаемого подхода вычисления меры сходства исследуемых объектов является определение теоретического корреляционного отношения весовых значений векторов направлений относительно их порядковых номеров в векторной модели. Последующее вычитание из единицы модуля разностного значения теоретических корреляционных отношений эталона и исследуемого объекта позволяет определить их меру сходства.

Преимущество предлагаемого подхода по сравнению с ранее используемым методом, основанным на вычислении значений модифицированного корреляционного отношения векторов направлений [3, 12], состоит в следующем. В данном случае исчезла необходимость формировать равномошное множество признаков, хотя число векторов направлений эталона и исследуемого объекта, как правило, различно. Тогда как при определении модифицированного корреляционного отношения необходимо дополнять недостающие весовые значения векторов направлений эталона или исследуемого объекта до равномошного множества признаков значениями математического ожидания и вводить коэффициенты ранжирования.

Экспериментальные исследования показали, что использование линейной зависимости (5) при нахождения линии регрессии не позволяет идентифицировать наиболее схожие объекты № 4 и № 7 (рис. 1) относительно объекта № 1, принимаемого за эталон. Действительно, в этом случае получаем равные значения меры сходства для объектов № 4 и № 7:

$$\sigma_1^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_1^2=4.31149620; \quad \eta_1=0.92805171; \quad M_{1,1}=1.00000000;$$

$$\sigma_4^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_4^2=4.39729501; \quad \eta_4=0.93724034. \quad M_{1,4}=0.99081137;$$

$$\sigma_7^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_7^2=4.39729501; \quad \eta_7=0.93724034. \quad M_{1,7}=0,99081137.$$

Для повышения точности идентификации исследуемых объектов при построении линии регрессии были использованы многочлены третьего порядка, что позволило получить более точные значения теоретического корреляционного отношения и произвести идентификацию наиболее схожих объектов № 4 и № 7 относительно объекта № 1, принимаемого за эталон:

$$\sigma_1^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_1^2=4.31351341; \quad \eta_1=0.92826879; \quad M_{1,1}=1.00000000;$$

$$\sigma_4^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_4^2=4.40081073; \quad \eta_4=0.93761493; \quad M_{1,4}=0.99065386;$$

$$\sigma_7^2=5.00591716; \quad \bar{\delta}_7^2=4.40311611; \quad \eta_7=0.93786049; \quad M_{1,7}=0,99040830.$$

На рис. 2 приведены примеры выравнивания эмпирической линии регрессии с помощью линейной (5) и нелинейной (7) зависимостей \bar{y}_x .

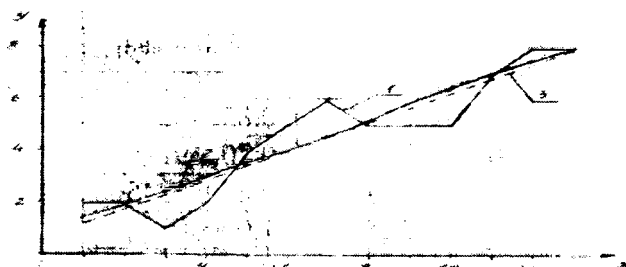


Рис. 2. Выравнивание эмпирической линии регрессии

(1 – весовые значения векторов направлений; 2 – $\bar{y}_x = a + bx + cx^2 + dx^3$; 3 – $\bar{y}_x = a + bx$).

4. Идентификация и классификация объектов космического снимка участка местности.

Произведем идентификацию объектов космического снимка участка местности земной поверхности (рис.3). Нормализованные векторные модели выделенных объектов участка земной поверхности космического снимка приведены в табл. 3.

Таблица 3

Нормализованные векторные модели исследуемых объектов

Номер объекта	Весовые значения векторов направлений	Угол ориентации α^0
1	1,2,2,4,2,1,8,2,2,5,5,5,5,5,6,4,5,6,8,8,8,8 (24)	0
2	1,2,2,3,4,4,4,6,6,6,6,7,6,7,8,2,2,2,8 (19)	270
3	2,1,1,2,1,1,1,3,3,2,1,1,8,2,4,4,4,4,5,6,6,6,4,5,6,6,7,6,6,7,8,1,1,7 (35)	180
4	1,1,1,1,1,1,1,4,4,4,4,4,6,6,7,7,7 (17)	180
5	2,2,2,8,8,3,3,3,4,3,3,5,6,4,4,4,5,7,7,8,7,6,8,6,8,8 (26)	180
6	1,1,1,1,1,2,1,1,1,2,2,2,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,7,6,6,6 (25)	0

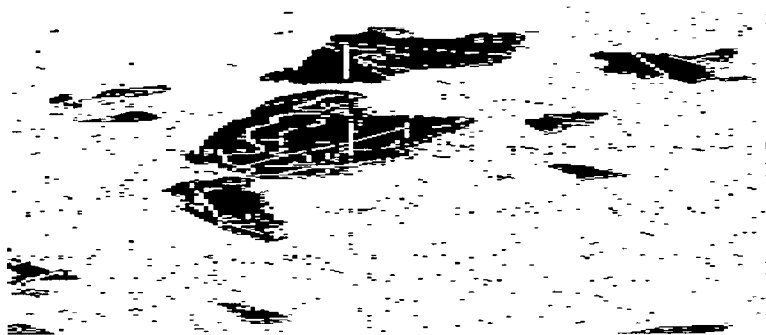


Рис.3. Космический снимок участка местности.

Значения теоретического корреляционного отношения исследуемых объектов участка местности космического снимка, вычисленные с помощью разработанного авторами программного комплекса, и значения меры сходства исследуемых объектов относительно объекта № 4, принимаемого за эталон, приведены в табл. 4.

Таблица 4
Теоретическое корреляционное отношение исследуемых объектов

Номер объекта	Теоретическое корреляционное отношение	Мера сходства
1	0.80581474	0.83746217
2	0.67105233	0.70269976
3	0.64919102	0.68083845
4	0.96835257	1.00000000
5	0.67225798	0.70390541
6	0.94842298	0.98007041

На рис. 4 представлены контурные представления исследуемых объектов космического снимка земной поверхности с указанием меры сходства относительно объекта № 4, принимаемого за эталон.

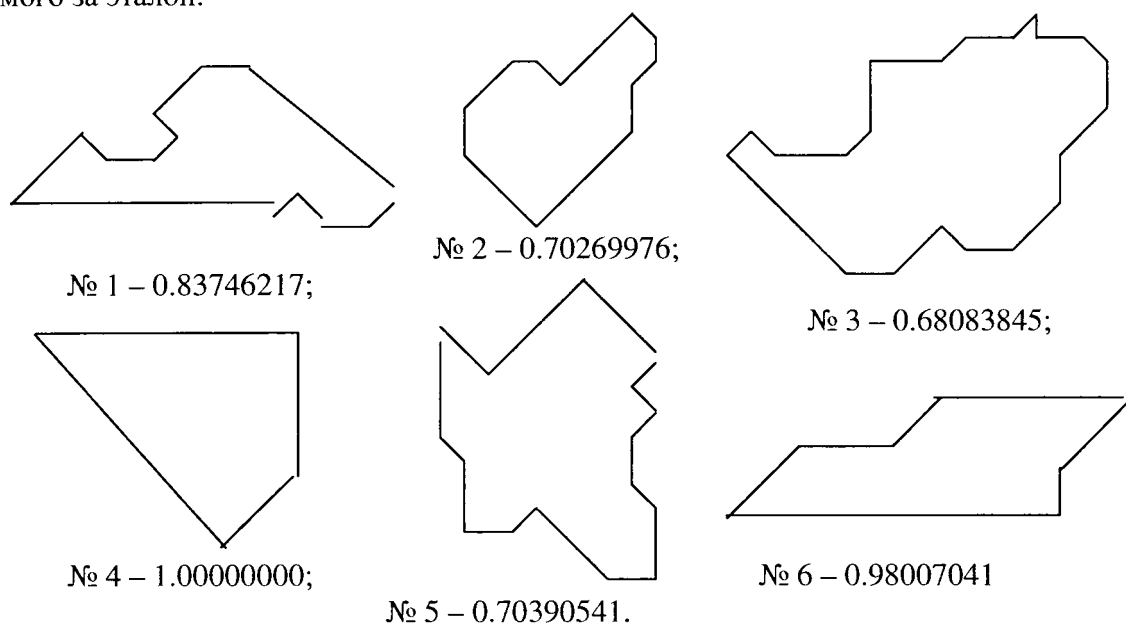


Рис. 4. Контурные представления исследуемых объектов космического снимка с указанием меры сходства.

Определение теоретического корреляционного отношения весовых значений векторов направлений и их порядковых номеров в векторной модели позволяет произвести соответствующее ранжирование объектов полутоновых изображений.

Автоматическую классификацию объектов полутоновых изображений при отсутствии обучающей выборки удобно производить, используя пороговые показатели мер сходства (табл. 5), задаваемые значениями интеграла вероятности, и меру сходства $M_{s..l}$ исследуемых объектов [13]. Совокупность объектов, мера сходства которых соответствует определенному пороговому значению, образует соответствующий кластер.

Таблица 5

Классификация исследуемых объектов

Номер кластера	Пороговое значение кластера принадлежности объекта	Номер объекта	Мера сходства исследуемых объектов, $M_{s..l}$	Кластер принадлежности объекта
1	0,99953 – 1,0000	1	0.85017008	9
2	0,99730 – 0,99952	2	0.70269976	11
3	0,99400 – 0,99729	3	0.68083845	12
4	0,98760 – 0,99399	4	1.00000000	1
5	0,97560 – 0,98759	5	0.70390541	11
6	0,95450 – 0,97559	6	0.98007041	5
7	0,92810 – 0,95450			
8	0,89040 – 0,92809			
9	0,83850 – 0,89039			
10	0,76990 – 0,83849			
11	0,68270 – 0,76989			
12	0,57630 – 0,68269			
13	0,45750 – 0,57689			
14	0,31080 – 0,45749			
15	0,15850 – 0,31079			
16	0,0800 – 0,15849			

Из табл. 5 следует хорошее совпадение меры сходства исследуемых объектов с определяемым кластером.

Заключение.

Для повышения точности идентификации исследуемых объектов при построении линии регрессии предложено использовать полиномы высших порядков. Увеличение порядка и числа параметров выравнивающей кривой хотя и способствует лучшему приближению к эмпирической линии, одновременно может привести к удалению от действительной теоретической. Этим налагается предел увеличения точности выравнивания при помощи повышения степени многочлена [10]. Для практической реализации предложенного подхода определения меры сходства исследуемых объектов использован полином третьего порядка, характеризующийся незначительными вычислительными затратами.

Проведенные авторами экспериментальные исследования показали, что подход, основанный на вычислении теоретического корреляционного отношения весовых значений векторов направлений и их порядковых номеров, позволяет повысить точность идентификации исследуемых объектов в 1,4 раза относительно модифицированного корреляционного отношения [3, 11] и не менее, чем в 1,039 раз относительно дисперсионного анализа весовых значений векторов направлений [11].

Классификация исследуемых объектов проведена на основе использования пороговых значений кластера принадлежности объекта, задаваемых значениями интеграла вероятностей [12], и вычисленных значений меры сходства исследуемых объектов относительно объекта № 4, принимаемого за эталон.

При увеличении порядка и числа параметров выравнивающей кривой повышение точности идентификации исследуемых объектов можно достигнуть путем использования современных высокопроизводительных суперсистем на базе суперкомпьютеров, например, СКИФ К-1000. В перспективе для выбора "наилучшей регрессии" вместо метода наименьших квадратов предлагается использовать метод группового учета аргумента, позволяющий определить в данном классе функций оптимальную структуру искомой зависимости и идентифицировать параметры по внешним критериям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров А.А. Алгоритмическое обеспечение информационно-управляющих систем адаптивных роботов. Алгоритмы технического зрения роботов // Техническая кибернетика. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ. – 1984. – т.17. – С. 251–294.
2. Бокуть Л.В., Кулешов А.Я. Тематическая обработка полутоновых изображений // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2003. – т.8. – №4. – С. 33–43.
3. Абламейко С.В., Боричев С.П., Крючков А.Н., Кулешов А.Я. Идентификация контурных объектов на космических снимках // Материалы Первого белорусского космического конгресса – Мн: ОИПИ НАН Беларуси 2003. – С. 143–145.
4. Распознавание образов: состояние и перспективы: Пер. с англ. / К. Верхаген, Р. Дейн, Ф. Грун и др. – М.: Радио и связь, 1985. – 104 с.
5. Прикладная статистика: классификация и снижение размерности: Справочное издание / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, М.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. Под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
6. Красиков В.А., Штарьков Ю.М. Распознавание природных образований при многозональном зондировании // Аэрокосмические исследования Земли. Обработка видеoinформации на ЭВМ. – М.: Наука, 1978. – С. 87–107.
7. Раушенбах Г.В. Меры близости и сходства. Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. – М.: Наука, 1985. – С. 169–203.
8. Бокуть Л.В., Кулешов А.Я. Адаптивный алгоритм классификации объектов полутоновых изображений по весовым значениям векторов направлений, сглаженных методом скользящего среднего // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2001. – т.6. – №2–3. – С.107–112.
9. Венецкий И.Г., Кильдишев Г.С. Основы теории вероятности и математической статистики. – М.: Статистика, 1975. – 358 с.
10. Лапа В.Г. Математические основы кибернетики. – Киев: Высшая школа, 1974. – 450 с.
11. Murashko N., Romanchik D., Kuleshov A., Fedulov Y. Classification of gray-scale image objects using variance analysis of their vectorial models // Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2005): Proceeding of the Eighth International Conference (18 - 20 May, Minsk, Republic of Belarus). – Мн.: Propilei, 2005. – Р. 496–499.
12. Кулешов А.Я., Романчик Д.В. Классификация объектов полутоновых изображений при отсутствии обучающей выборки // Анализ цифровых изображений: Сб. науч. тр./ Под ред. С.В. Абламейко. – Мн.: ОИПИ НАН Беларуси, 2002. – С. 59–68.
13. Yarmosh N., Bokut L., Kuleshov A. Smoothing of the direction vectors' weight values by method of moving average // Материалы 5-й Международной конф. "Распознавание образов и обработка информации". – т. 2. – Минск, 1999. – С.53–59.